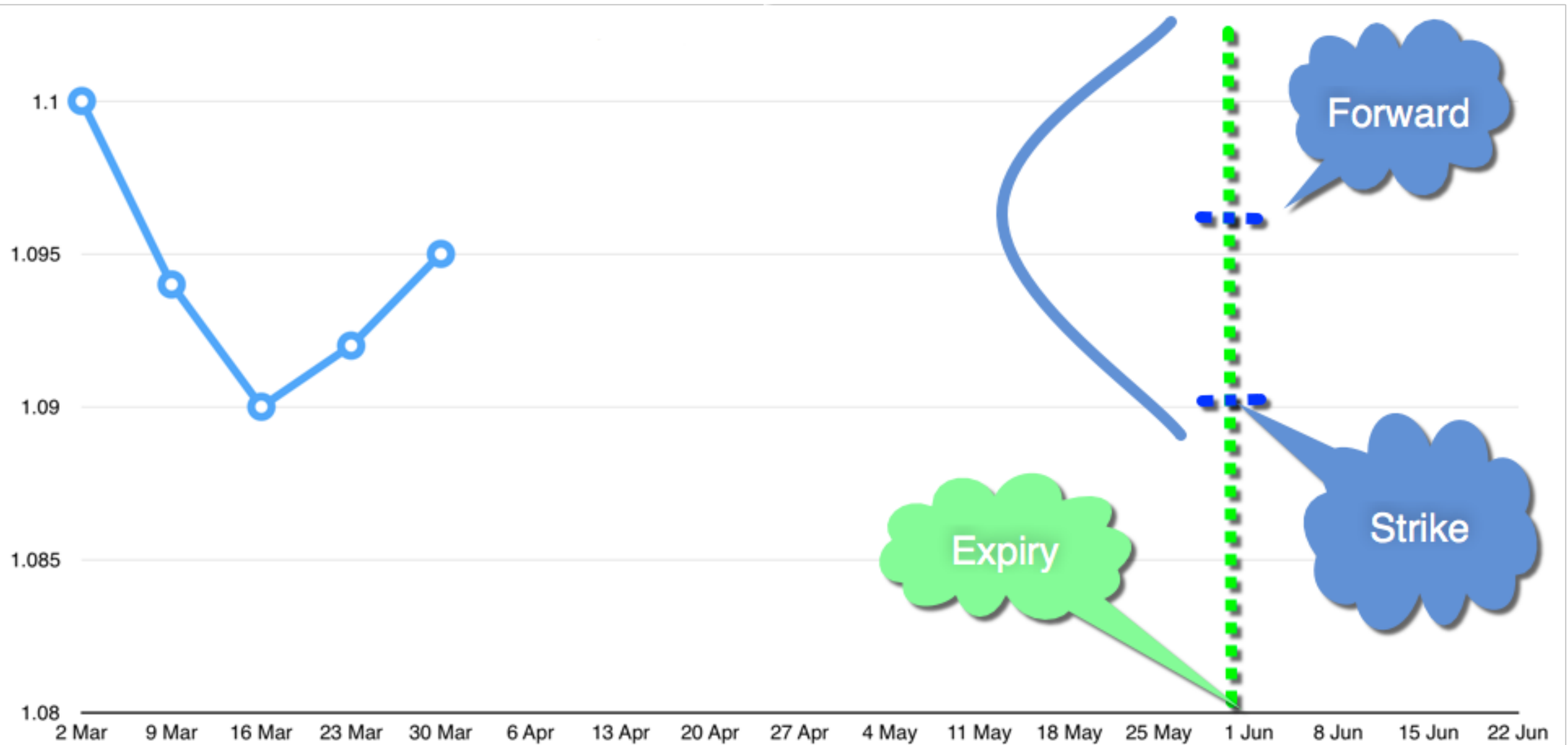


Математические модели и опционы

Plain Vanilla European Option

- Underlying: EURUSD
- Strike: $K=1.09$
- Expiry: $T=1$ июня 2016
- Type: Call

Plain Vanilla European Option



Black-Scholes

$$C(S, t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Black-Scholes

$$C(F, \tau) = D (N(d_+)F - N(d_-)K)$$

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln \left(\frac{F}{K} \right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2\tau \right]$$

$$d_{\pm} = d_{\mp} \pm \sigma\sqrt{\tau}$$

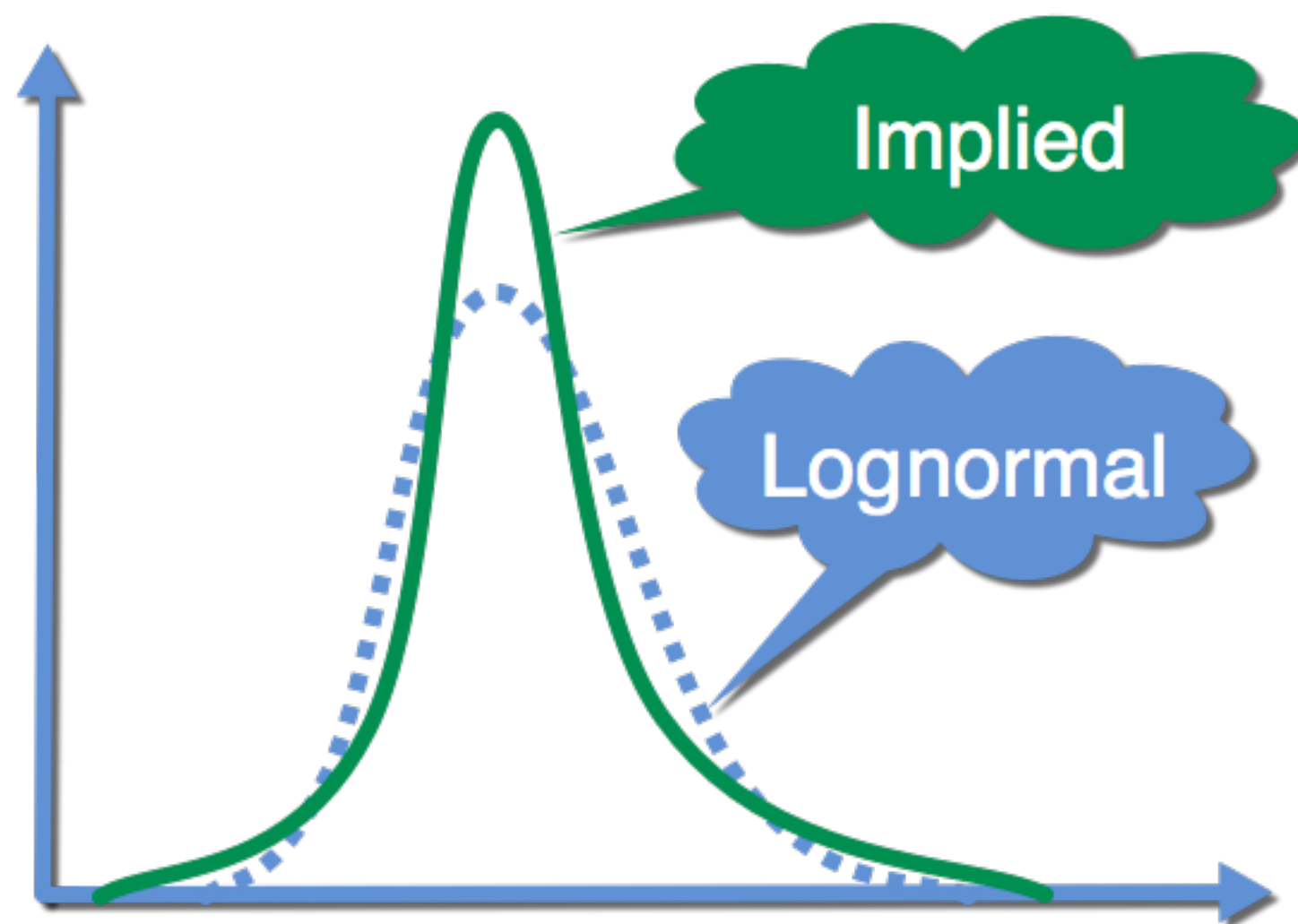
$$D = e^{-r\tau}$$

$$F = e^{r\tau}S$$

Black Scholes

- Простая модель, удобное уравнение
- Не соответствует ценам

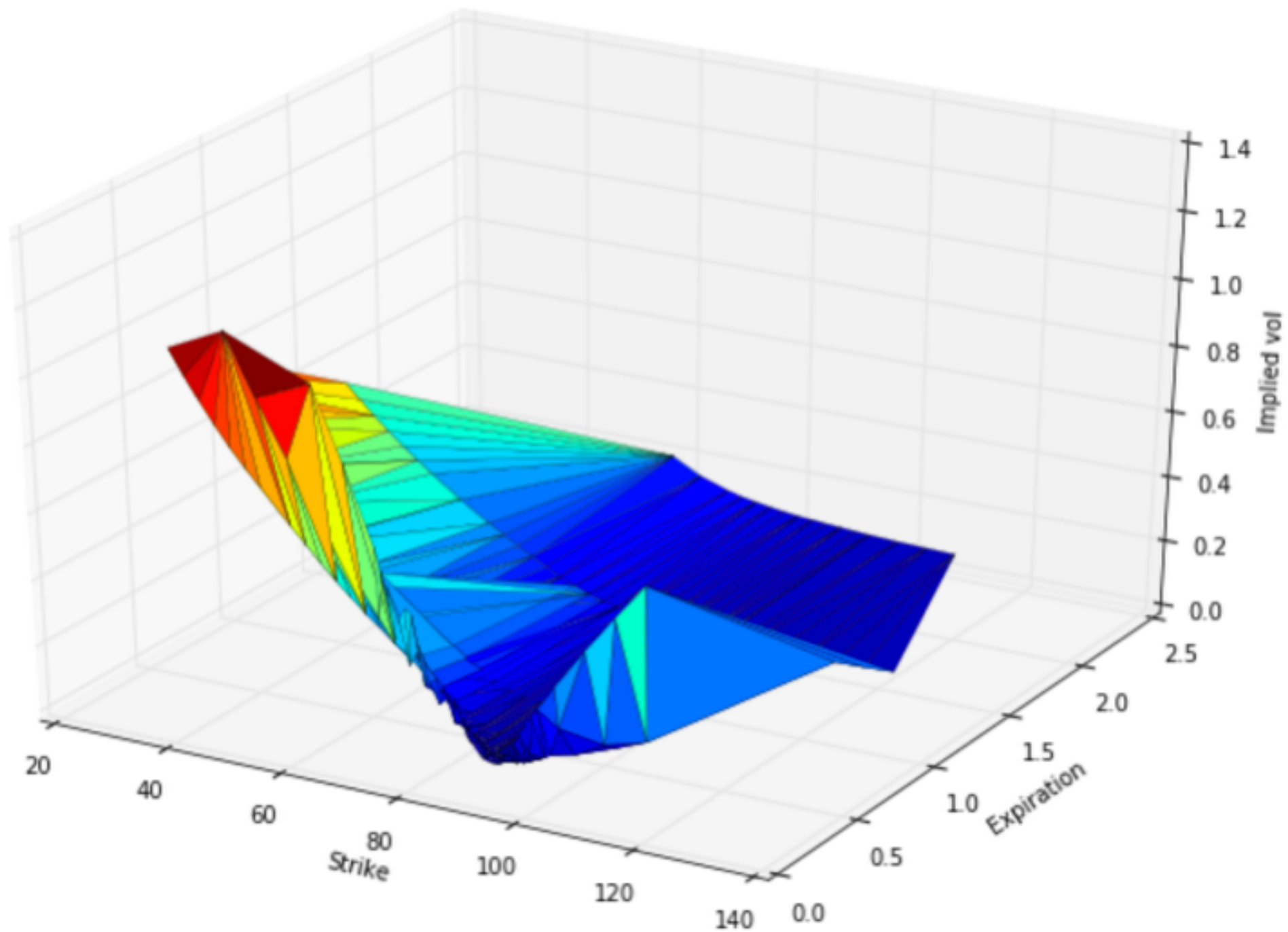
Implied и Lognormal распределения



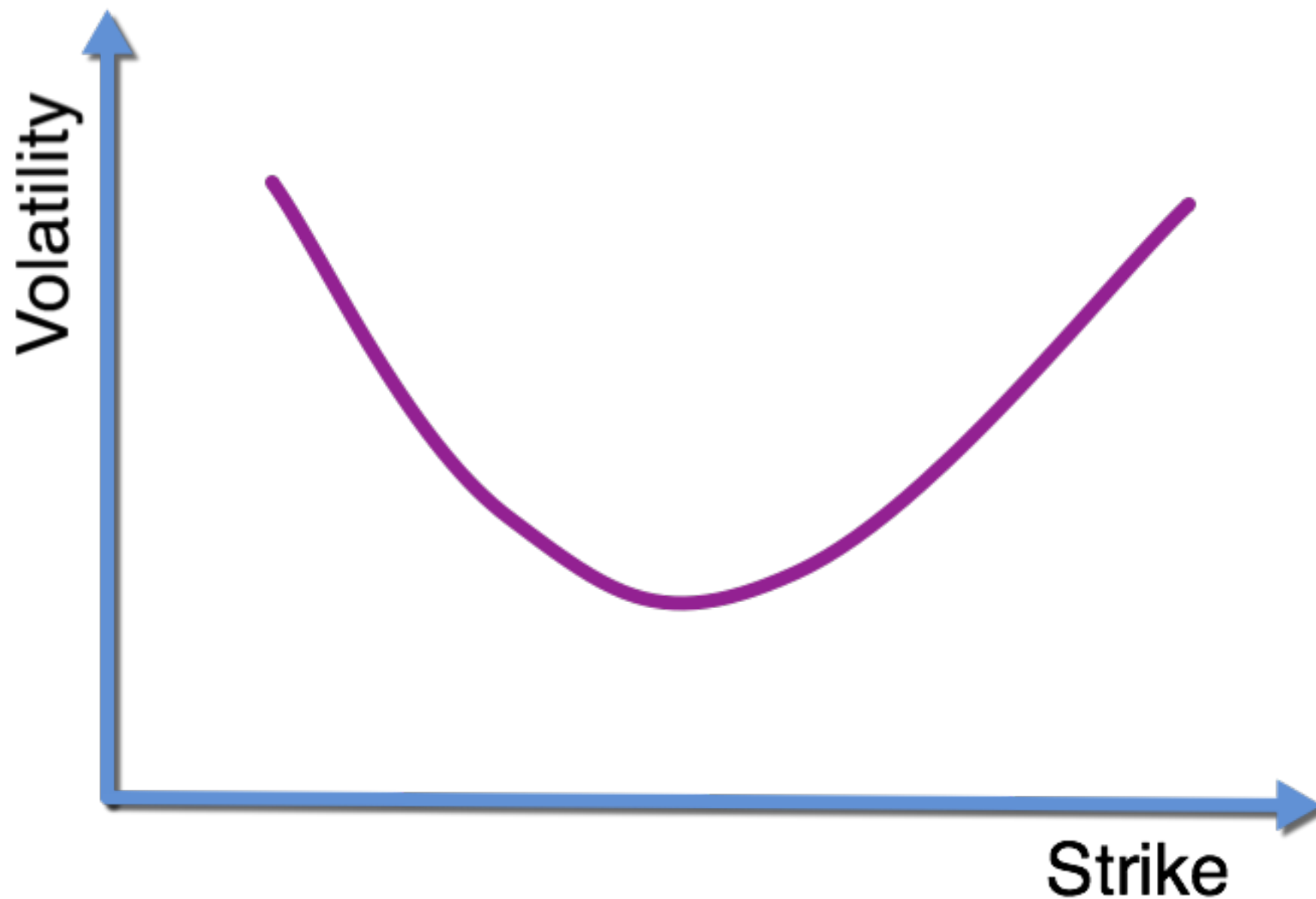
Volatility surface

- Параметр - волатильность, σ
- Опционы отличаются Expiry и Strike
- Для каждого опциона (пары значений Expiry и Strike) можно задать значение σ , соответствующее действительной цене
- Полученную зависимость $\sigma(T, K)$ называют поверхностью волатильности

Volatility Surface



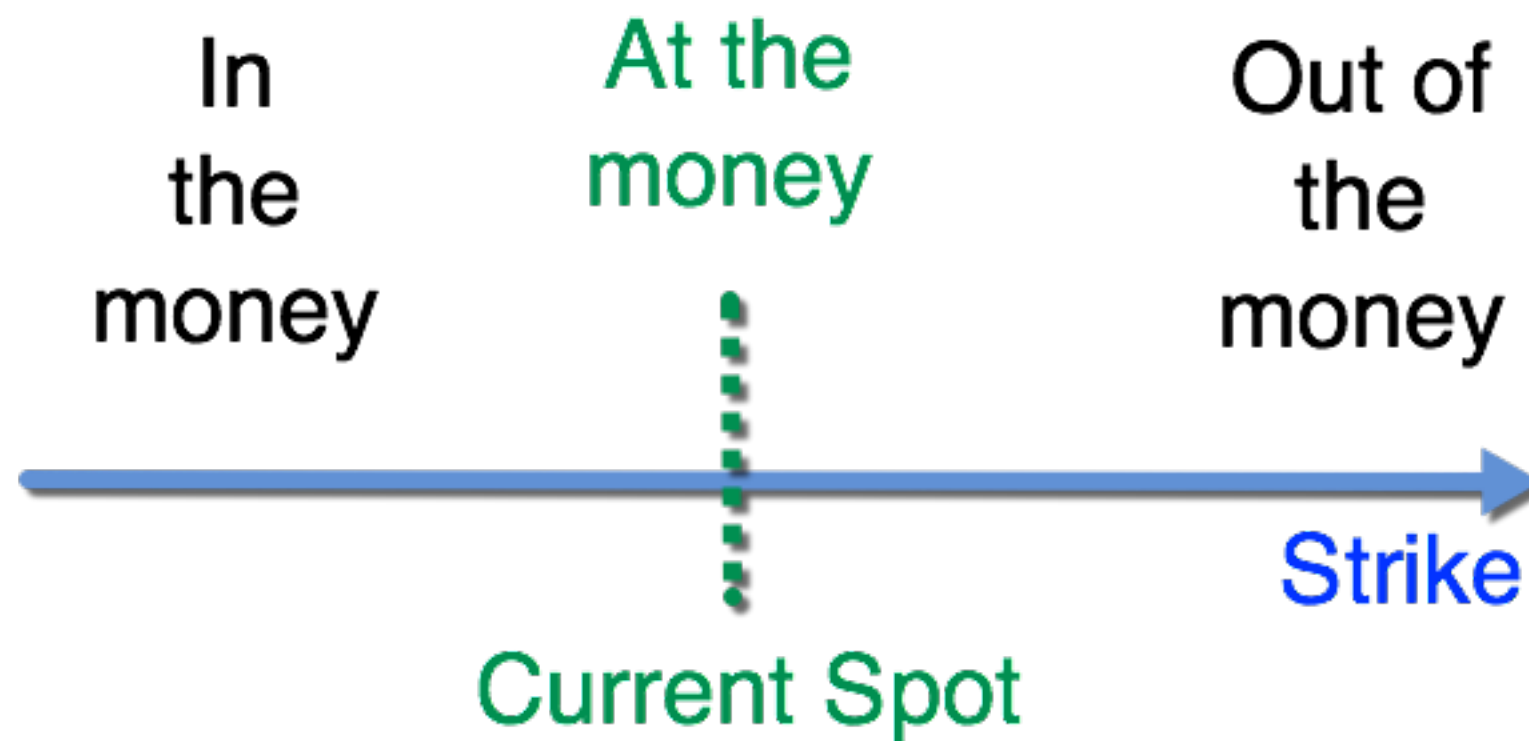
Volatility Smile



Volatility Surface

Strike/Expiry	1.08	1.09	1.1	1.11	1.12
30 Mar	12.4%	11.1%	11.9%	11.7%	11.9%
6 Apr	11.5%	11.1%	10.5%	10.6%	10.7%
29 Apr	11.2%	10.8%	10.5%	10.4%	10.4%
29 May	11.1%	10.6%	10.6%	10.5%	10.5%
26 Sep	11.2%	11.1%	10.9%	10.8%	10.7%

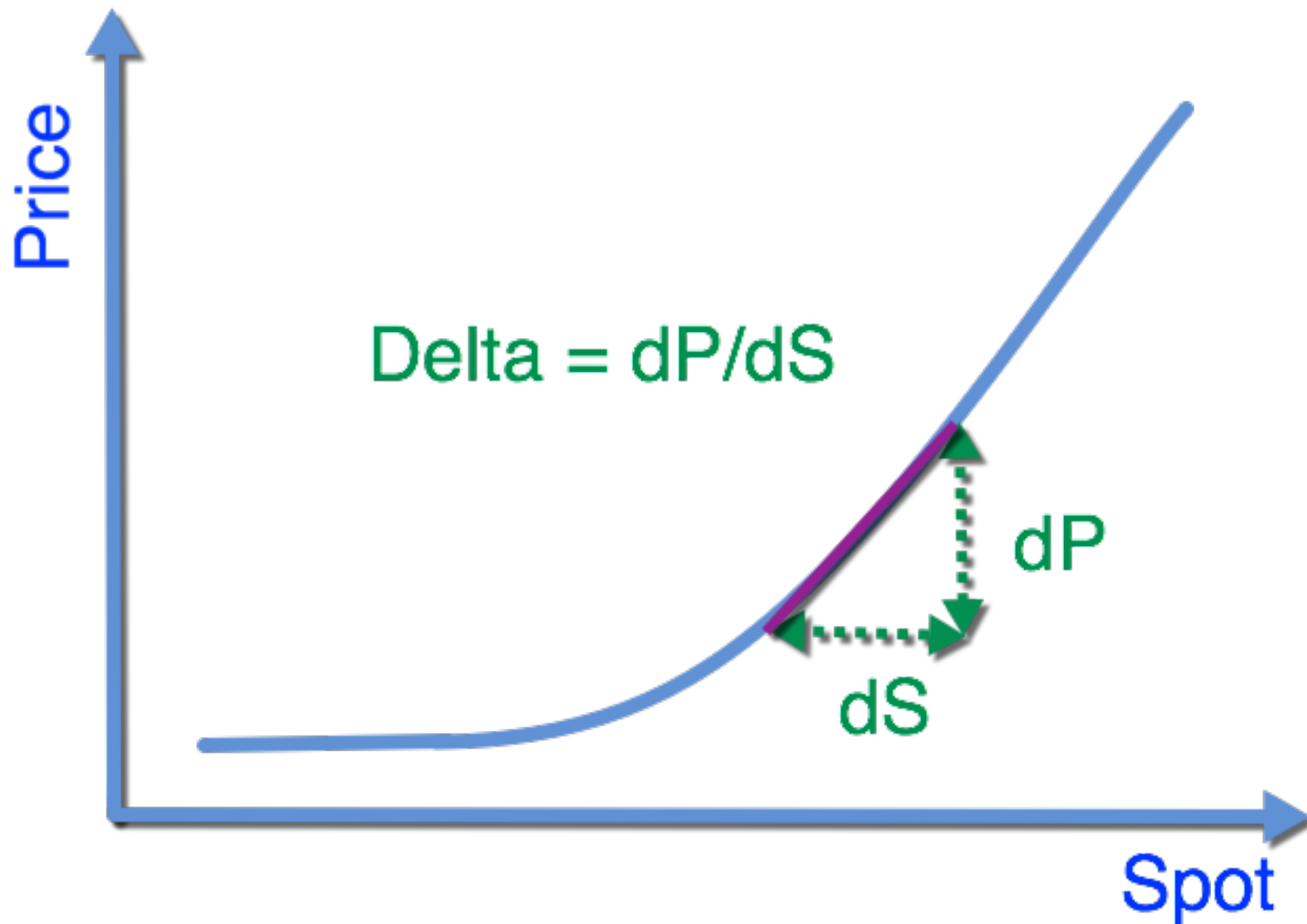
Moneyless for Call option



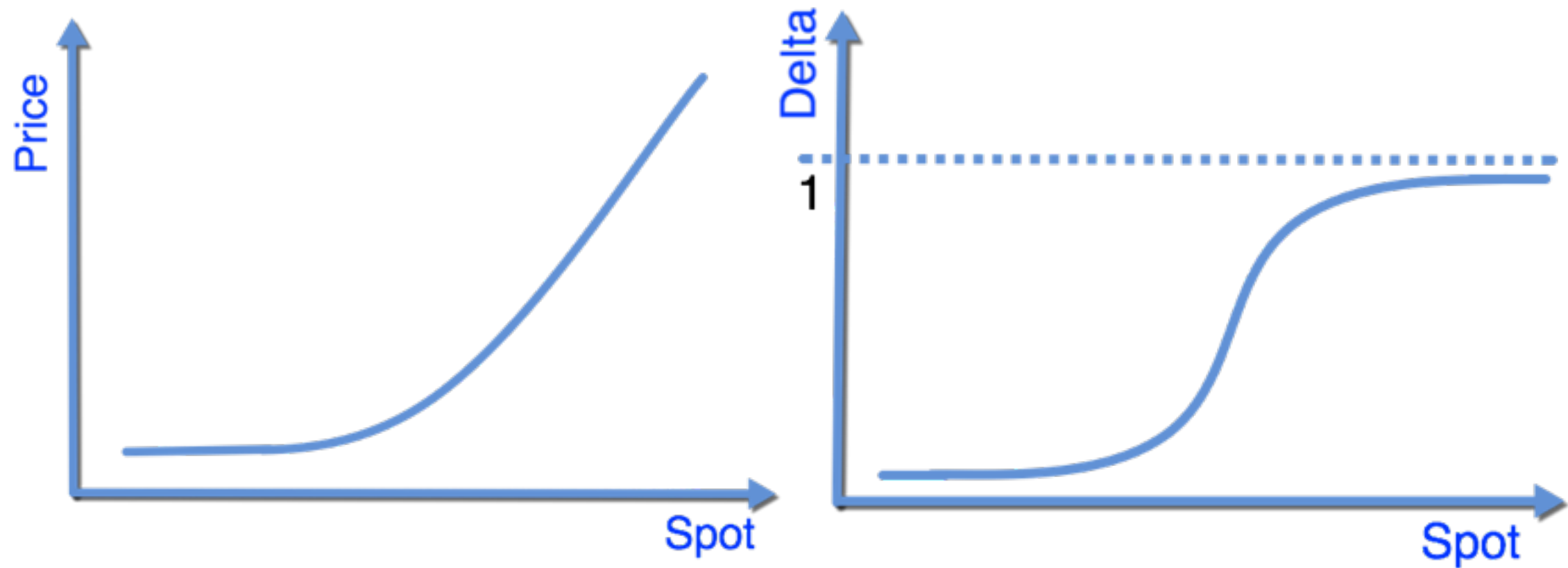
Задание Volatility Surface

Moneyiness/Expiry	Even more in the money	In the money	At the money	Out of the money	Even more out of the money
Tomorrow	12.4%	11.1%	11.9%	11.7%	11.9%
In 1 week	11.5%	11.1%	10.5%	10.6%	10.7%
In 1 month	11.2%	10.8%	10.5%	10.4%	10.4%
2 months	11.1%	10.6%	10.6%	10.5%	10.5%
6 months	11.2%	11.1%	10.9%	10.8%	10.7%

Delta



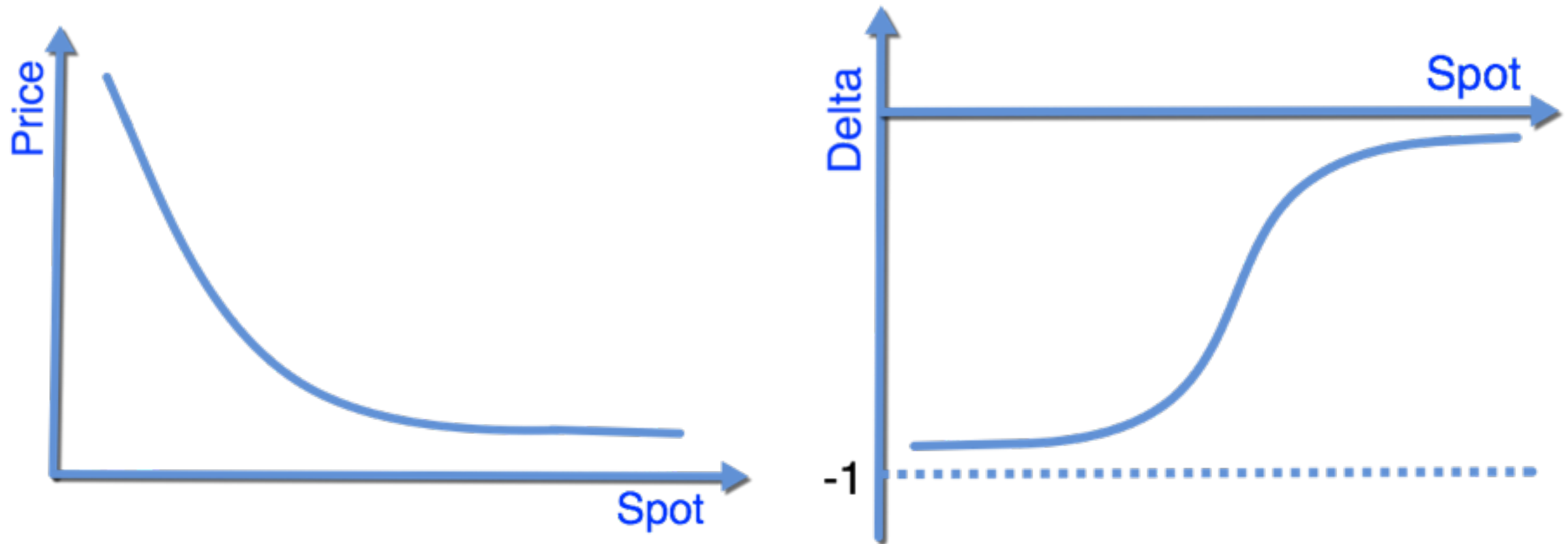
Call option Delta



Задание Volatility Surface

Delta/Expiry	90 Call	75 Call	At the money	25 Call	10 Call
Tomorrow	12.4%	11.1%	11.9%	11.7%	11.9%
In 1 week	11.5%	11.1%	10.5%	10.6%	10.7%
In 1 month	11.2%	10.8%	10.5%	10.4%	10.4%
2 months	11.1%	10.6%	10.6%	10.5%	10.5%
6 months	11.2%	11.1%	10.9%	10.8%	10.7%

Put option Delta



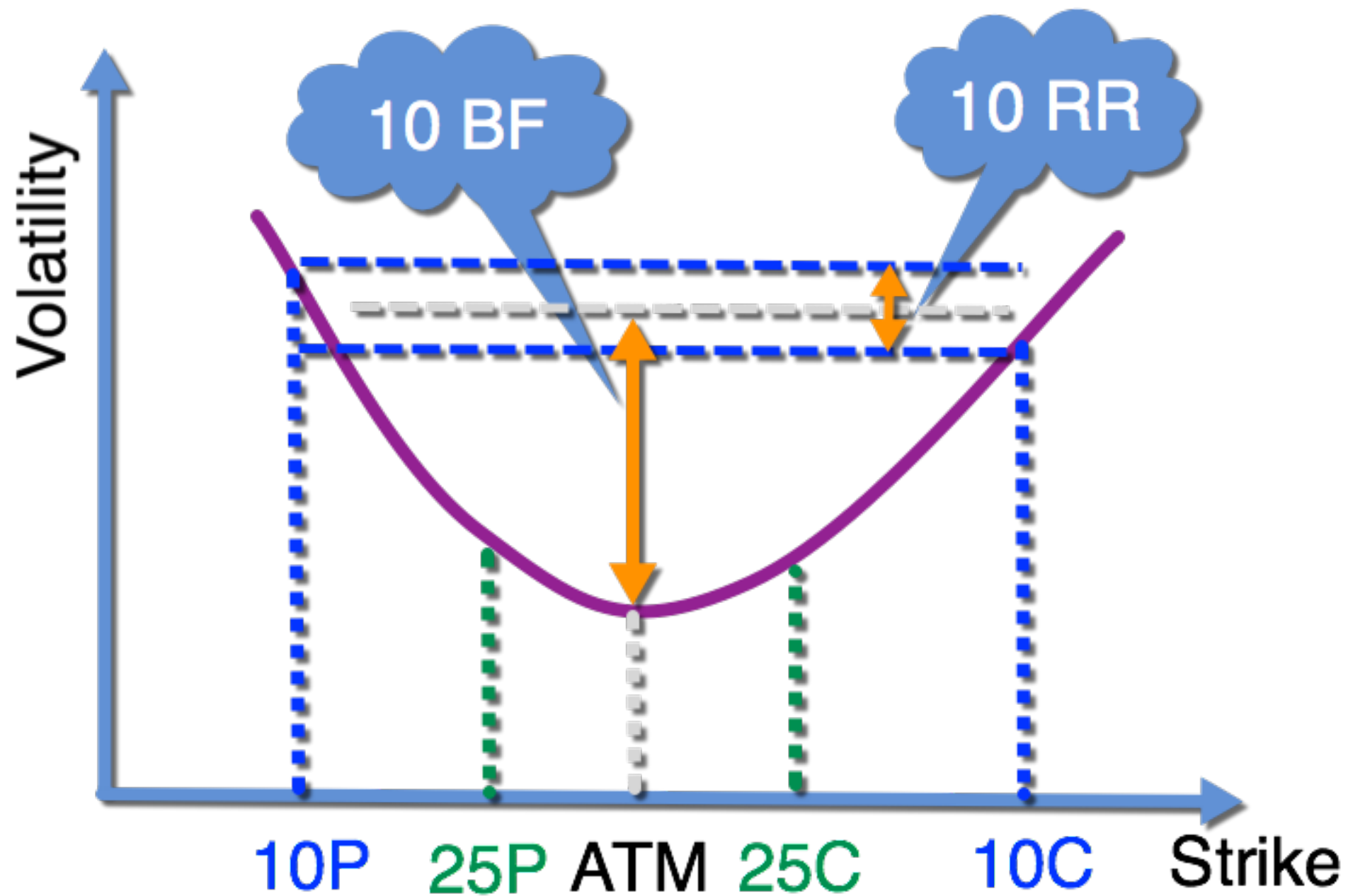
Задание Volatility Surface

Delta/Expiry	10 Put	25 Put	At the money	25 Call	10 Call
1D	12.4%	11.1%	11.9%	11.7%	11.9%
1W	11.5%	11.1%	10.5%	10.6%	10.7%
1M	11.2%	10.8%	10.5%	10.4%	10.4%
3M	11.1%	10.6%	10.6%	10.5%	10.5%
6M	11.2%	11.1%	10.9%	10.8%	10.7%

Задание Volatility Surface

- В дополнение к ATM задают
 - $RR = Call - Put$
 - $Smile\ Strangle/Butterfly = (Call + Put)/2 - ATM$

Volatility Smile



Задание Volatility Surface

Instrument/Expiry	ATM	25 RR	25 BF	10 RR	10 BF
1D	12.4%	0.6%C	0.2%	0.5%P	0.3%
1W	11.5%	0.5%P	0.1%	0.8%P	0.3%
1M	11.2%	0.4%P	0.3%	0.8%P	0.5%
3M	11.1%	0.1%P	0.3%	0.6%P	0.7%
6M	11.2%	0.3%P	0.5%	0.5%P	0.7%

Типы АТМ

- At-the-money forward
- Delta-neutral Straddle

Типы Strangle/BF

- Smile Strangle
- Market Strangle

Типы Delta

- Spot Delta
- Forward Delta
- Premium adjustment

Модели stochastic volatility

- Точнее соответствуют ценам
- σ моделируется как случайный процесс

Модели stochastic volatility

- Black Scholes

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

- Stochastic volatility

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t$$

$$d\nu_t = \alpha_{\nu,t} dt + \beta_{\nu,t} dB_t$$

$\alpha_{\nu,t}$ $\beta_{\nu,t}$ - функции ν

dB_t - случайный процесс, корреляция с W ρ

Heston

$$d\nu_t = \theta(\omega - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dB_t$$

- ω - среднее
- θ - скорость возврата к среднему
- ξ - волатильность волатильности

Constant Elasticity of Variance

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t$$

- Если $\gamma < 1$, то волатильность увеличивается при уменьшении цены
- Если $\gamma > 1$, то волатильность увеличивается при увеличении цены

SABR

- Stochastic alpha, beta, rho

$$dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t,$$

$$d\sigma_t = \alpha \sigma_t dZ_t,$$

$$dW_t dZ_t = \rho dt$$

Задача 1

- Какую форму имеет Volatility Smile, если левый хвост распределения больше, а правый меньше, чем у lognormal

Задача 2

- Какую форму имеет Volatility Smile, если цена underlying либо увеличится на 10%, либо уменьшится на 10%?

Задача 3

- Как выглядит Volatility Smile, если волатильность имеет положительную корреляцию с ценой Underlying?

Задача 4

- Как выглядит Volatility Smile, если $10RR$ положительный?

Данные для задач

- EURUSD spot = 1.1, $r(\text{EUR})=2\%$, $r(\text{USD})=0.5\%$
- Поверхность волатильности

Instrument/Expiry	ATM	25 RR	25 BF	10 RR	10 BF
1D	12.4%	0.6%C	0.2%	0.5%P	0.3%
1W	11.5%	0.5%P	0.1%	0.8%P	0.3%
1M	11.2%	0.4%P	0.3%	0.8%P	0.5%
3M	11.1%	0.1%P	0.3%	0.6%P	0.7%
6M	11.2%	0.3%P	0.5%	0.5%P	0.7%

Задача 5

- Определить цену ATM Put с Expiry через месяц

Задача 6

- Определить волатильность 25
Call с Expiry через неделю

Цена FX Option

$$c = S_0 e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r_d T} \mathcal{N}(d_2)$$

$$p = K e^{-r_d T} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} \mathcal{N}(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$